جامعة البعث — امتحانات الدورة التكميلية ٢٠١٦-٢٠١٧ — المدة : ساعة ونصف

كلية العلوم — أسئلة مقرر التحليل التابعي (١) — العلامة :(١٠٠) درجة

قسم الرياضيات — لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي — الاسم :

السؤال الأول (٢٨ درجة):

(١) إذا كان $0 < p \leq 1$ وكان $a_k \geq 0$ ، $b_k \geq 0$ $(k = 1,2,..n)$ فأثبت أن :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p \leq \sum_{k=1}^{n} a_k{}^p + \sum_{k=1}^{n} b_k{}^p$$

(٢) (أ) أثبت أن كل مجموعة محدبة مطلقاً هي مجموعة محدبة ومتوازنة .

(ب) ليكن X فضاء خطي منظم ، ولتكن $E = \{x \in X : \|x\| < 1\}$

بين فيما إذا كانت E مجموعة متوازنة وماصة .

(٣) ليكن التطبيق: $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ ايزومتري. أثبت أنه مستمر بانتظام هوميومورفيزم .

السؤال الثاني (٢٢ درجة):

(أ) أثبت أن كل فضاء خطي منظم ذو n بعداً هو فضاء باناخ .

(ب) ليكن التطبيق : $A : C[0,1] \to C[0,1]$

والمعرف بالعلاقة : $A(f(x)) = \frac{1}{2}\int_0^1 xtf(t)dt + \frac{5}{6}x$

المطلوب : أثبت أنه تطبيق ضاغط في الفضاء $C[0,1]$ ، وأوجد النقطة الثابتة له .

السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠ درجة):

١)- لتكن $h_1, h_2, ...$ جملة متعامدة نظامية في فضاء هيلبرت H أثبت أنه إذا كان $\langle x, h_k \rangle = 0$ مهما يكن $k = 1,2,3.....$ محققة فقط من أجل $x = \theta$ فإن الجملة $h_1, h_2, ...$ تامة في H .

٢) – أثبت أن الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء هيلبرت .

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

بفرض $X_1, X_2, ...$ قاعدة في فضاء باناخ B . ولتكن S مجموعة كل المتتاليات العددية $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\}$ التي من أجلها تتقارب السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$:

أثبت أن المؤثر A المعرف كما يلي :

$$A : S \longrightarrow B$$

$$A(\alpha) = X \quad ; \quad X = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$$

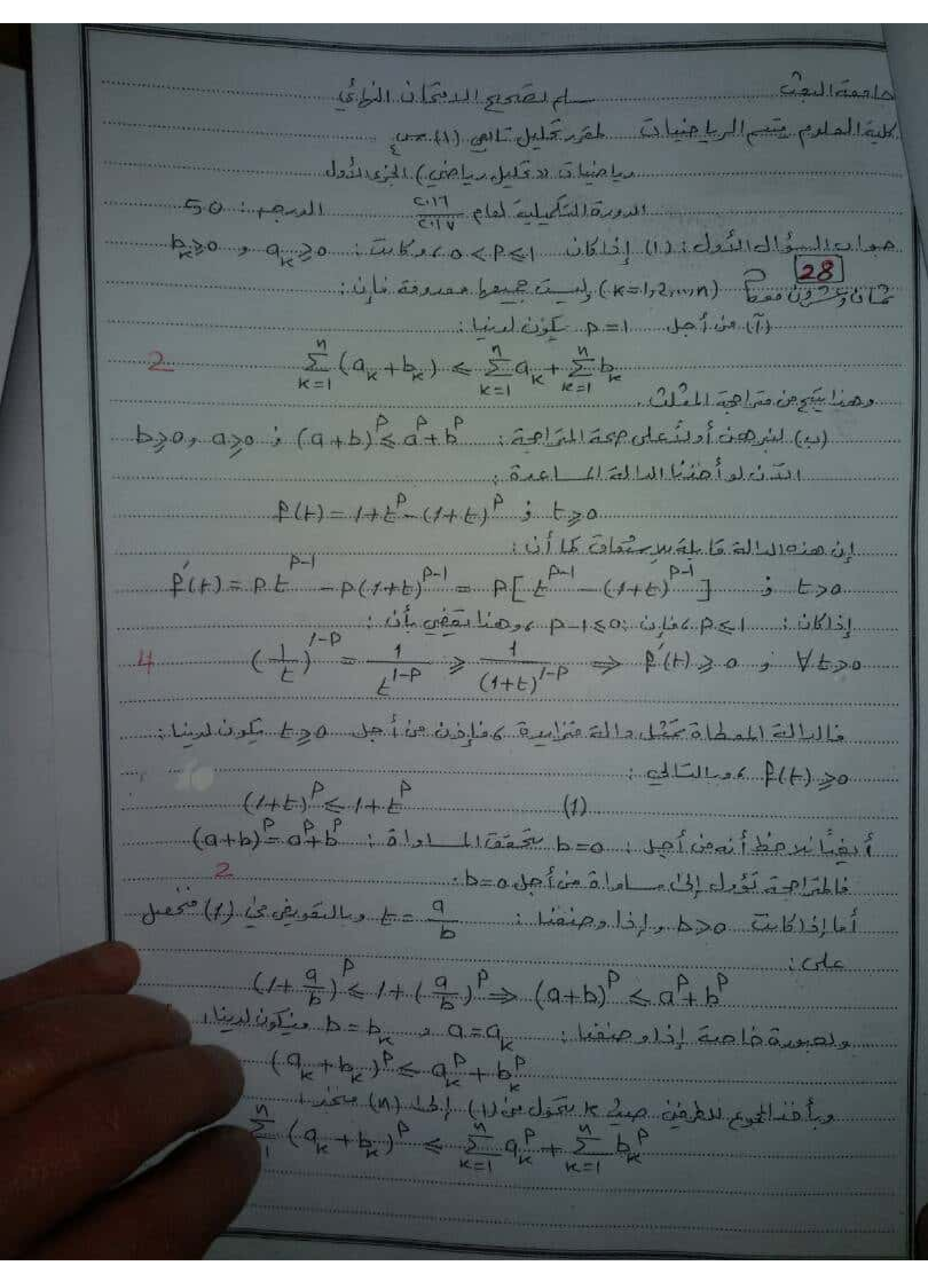
مؤثر خطي و محدود وأوجد نظيمه . أوجد المؤثر المرافق A^* ماذا تستنتج ؟.

السؤال الخامس (١٠ درجات):

ليكن u_0 عنصراً مثبتاً من الفضاء $\mathbb{R}^n$ ، ولنأخذ الدالي $f(x) = \langle x, u_0 \rangle \; ; \; x \in \mathbb{R}^n$

أثبت أن f دالي خطي حقيقي مستمر على $\mathbb{R}^n$ واحسب نظيمه $\|f\|$.

انتهت الأسئلة — مدرسا المقرر



جامعة البعث ـــ سلم تصحيح الامتحان النظري

كلية العلوم قسم الرياضيات مقرر تحليل تابعي (1) س٤

رياضيات (تحليل رياضي) الجزء الأول

الدورة التكميلية لعام $\frac{2016}{2017}$ الدرجة: 50

جواب السؤال الأول: (1) إذا كان $0 < p \leq 1$ وكانت: $a_k \geq 0$ و $b_k \geq 0$

ثمان وعشرون فقط **28** $(k=1,2,\dots,n)$ وليست جميعها معدومة فإن:

(آ) من أجل $p=1$ يكون لدينا:

2
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) \leq \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k$$

وهذا ينتج من متراجحة المثلث.

(ب) لنبرهن أولاً على صحة المتراجحة: $(a+b)^p \leq a^p+b^p$ ؛ $a \geq 0$ و $b \geq 0$

لذلك لنأخذ الدالة المساعدة:

$$f(t) = 1+t^p-(1+t)^p \quad ; \quad t \geq 0$$

إن هذه الدالة قابلة للاشتقاق كما أن:

$$f'(t) = p\,t^{p-1} - p(1+t)^{p-1} = p\left[t^{p-1}-(1+t)^{p-1}\right] \quad ; \quad t>0$$

إذا كان: $p \leq 1$ فإن: $p-1 \leq 0$، وهذا يقتضي بأن:

4
$$\left(\frac{1}{t}\right)^{1-p} = \frac{1}{t^{1-p}} \geq \frac{1}{(1+t)^{1-p}} \Rightarrow f'(t) \geq 0 \quad ; \quad \forall t>0$$

فالدالة المعطاة تمثل دالة متزايدة، وإذن من أجل $t \geq 0$ يكون لدينا:

$f(t) \geq 0$، وبالتالي:

$$(1+t)^p \leq 1+t^p \qquad (1)$$

أيضاً نلاحظ أنه من أجل: $b=0$ تتحقق المساواة: $(a+b)^p = a^p+b^p$

2

فالمتراجحة تتحول إلى مساواة من أجل $b=0$:

أما إذا كانت $b>0$ وإذا وضعنا: $t=\frac{a}{b}$ وبالتعويض في (1) نحصل على:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^p \leq 1+\left(\frac{a}{b}\right)^p \Rightarrow (a+b)^p \leq a^p+b^p$$

وبصورة خاصة إذا وضعنا: $a=a_k$ و $b=b_k$ فيكون لدينا:

$$(a_k+b_k)^p \leq a_k^p+b_k^p$$

وبأخذ المجموع للطرفين حيث k يتحول من (1) إلى (n) نحصل:

$$\sum_{1}^{n}(a_k+b_k)^p \leq \sum_{k=1}^{n}a_k^p + \sum_{k=1}^{n}b_k^p$$

(2) (أ) إذا كانت E مجموعة محدبة مطلقاً فيكون من أجل أي عنصرين $x,y \in E$ وأي عددين λ, μ حيث $|\lambda|+|\mu| \leq 1$ لدينا:

$$\lambda x + \mu y \in E$$

وعليه فإنه أيضاً كان $x,y \in E$ وأيضاً كان العددين $\lambda \geq 0$ و $\mu \geq 0$ حيث $\lambda + \mu = 1$ ($\lambda + \mu = |\lambda|+|\mu| = 1 \leq 1$)

نجد: $\lambda x + \mu y \in E$

وهذا يعني أن المجموعة E تمثل مجموعة محدبة.

ومن جهة ثانية حسب الغرض إذا كان $x,y \in E$ وإذا كان λ و μ عددان ما بحيث: $|\lambda|+|\mu| \leq 1$

5

فيكون من أجل $\lambda = 1$ و $\mu = 0$ لدينا،

$$\lambda x + \mu y = \lambda x + 0 = \lambda x = x \in E$$

فإذن إذا كان: $x \in E$ و $|\lambda| \leq 1$ فإن، $\lambda x \in E$

الأمر الذي يقضي بأن E مجموعة متوازنة.

(ب) إن المجموعة المعطاة E مجموعة متوازنة كونها محدبة مطلقاً لأنه من أجل أي عنصرين $x,y \in E$ وأي عددين λ, μ حيث: $|\lambda| + |\mu| \leq 1$

يكون:

$$\|\lambda x + \mu y\| \leq \|\lambda x\| + \|\mu y\| = |\lambda| \cdot \|x\| + |\mu| \cdot \|y\| <$$

$$< |\lambda| + |\mu| \leq 1 \Rightarrow \|\lambda x + \mu y\| < 1 \Rightarrow$$

$$\lambda x + \mu y \in E$$

أي: إذا كان $x \in E$ و $|\lambda| \leq 1$، فإن،

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| < |\lambda| \cdot 1 = |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \|\lambda x\| < 1 \Rightarrow$$

$$\lambda x \in E$$

فهي مجموعة متوازنة

أيضاً هذه المجموعة هي مجموعة ماصة لأنه لو فرضنا بأن: $\rho = \rho(x) = \dfrac{1}{1+\|x\|}$ و

5

$x \in X$ نجد أن: $\rho > 0$، ولنأخذ λ بحيث:

$|\lambda| \leq \rho$ عندئذٍ يكون:

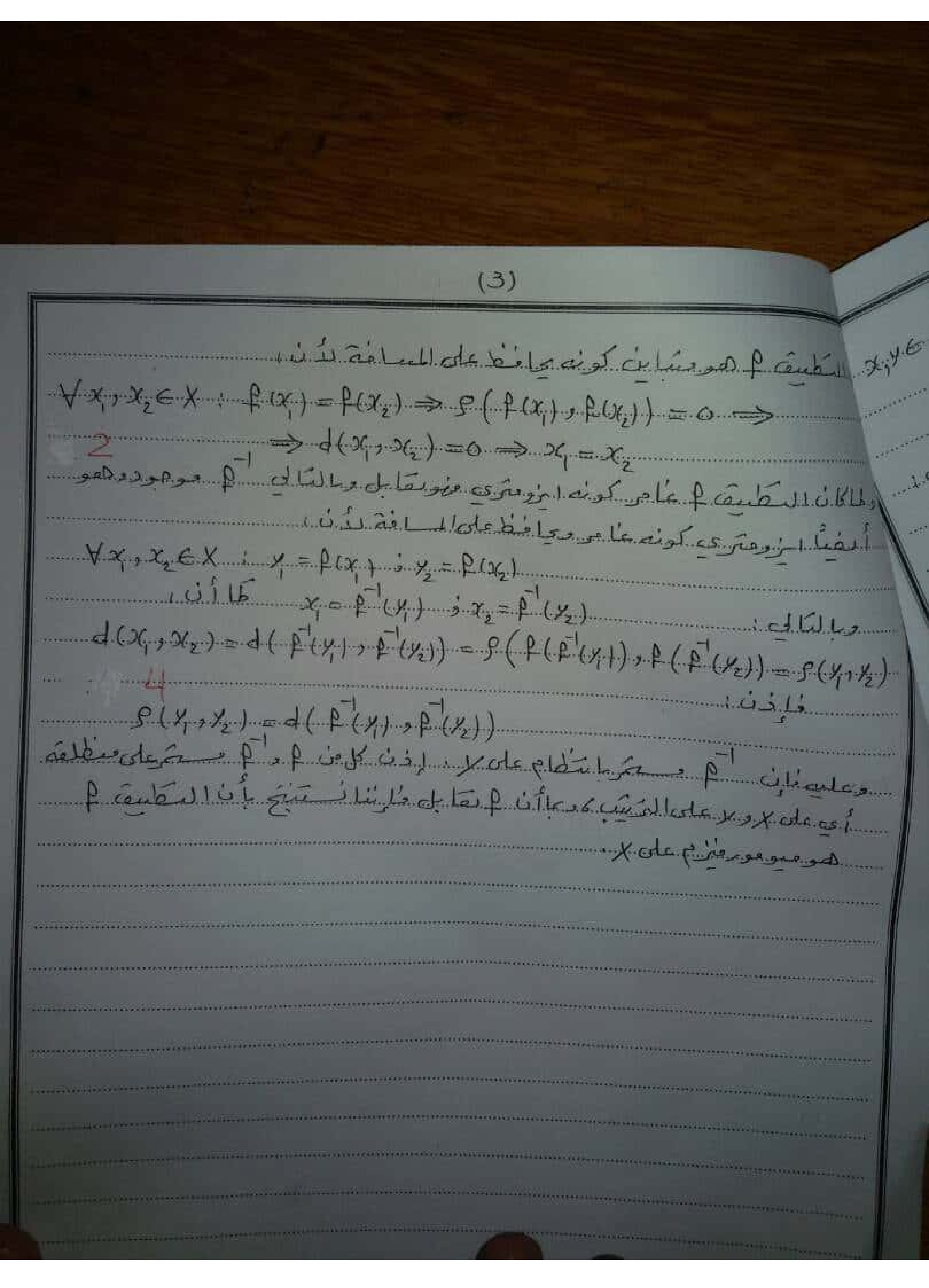
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \leq \rho \cdot \|x\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1 \Rightarrow \lambda x \in E$$

(3) ليكن $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي، عندئذٍ يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ حيث يكون، $\forall x_1, x_2 \in X$ ؛

2

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon$$

إذن التطبيق f مستمر بانتظام على X.



التطبيق f هو متباين كونه يحافظ على المسافة لأن:

$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) = 0 \Rightarrow$

2

$\Rightarrow d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

وطالما أن التطبيق f غامر كونه ايزومتري فهو تقابل وبالتالي f^{-1} موجود وهو

أيضاً ايزومتري كونه غامر ويحافظ على المسافة لأن:

$\forall x_1, x_2 \in X ; y_1 = f(x_1) ; y_2 = f(x_2)$

طالما أن: $x_1 = f^{-1}(y_1) ; x_2 = f^{-1}(y_2)$

وبالتالي:

$d(x_1, x_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = \rho(f(f^{-1}(y_1)), f(f^{-1}(y_2))) = \rho(y_1, y_2)$

4

فإذن:

$\rho(y_1, y_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$

وعليه فإن f^{-1} مستمر بانتظام على Y ، إذن كل من f و f^{-1} مستمر على منطقة

أي على X و Y على الترتيب، وبما أن f تقابل فإننا نستنتج بأن التطبيق f

هو هوميومورفيزم على X.

جواب السؤال الثاني (أ) لسكن E فضاء خطياً منظماً ذو n بعداً، ولتكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ قاعدة في E، ولنأخذ أي متتالية كوشي **22**

اختيارية (x^N) في E. عندئذٍ يكون:

$$x^N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(N)} x_i \quad (N = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{و} \quad \|x^N\|_0 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^N|$$

الآن من أجل $i = 1, 2, 3, \dots, n$ يكون لدينا:

$$|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^{(M)}| \le \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^{(M)}| = \|x^N - x^M\| \xrightarrow[\substack{N \to \infty \\ M \to \infty}]{} 0$$

4

وهذا يعني أن المتتالية العددية ($\lambda_i^{(N)}$) هي متتالية كوشي من أجل $i = 1, 2, \dots, n$ ومنه متقاربة (التقارب هنا هو التقارب الإحداثي)

الآن نفرض أن: $\lambda_i^{(N)} \to \lambda_i^0$ عندما $N \to \infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

وأن:

$$x^0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 x_i$$

فنجد أن:

$$\|x^N - x^0\|_0 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^0| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

6

إذن E فضاء باناخ.

(ب) لدينا

$$d(Af_1, Af_2) = |Af_1 - Af_2| = \frac{1}{2} \left| \int_0^1 xt\,[f_1(t) - f_2(t)]\,dt \right| \le$$

4

$$\le \frac{1}{2} \max_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le t \le 1}} |x t| \max_{0 \le t \le 1} |f_1(t) - f_2(t)| \le \frac{1}{2} \max_{0 \le t \le 1} |f_1(t) - f_2(t)|$$

$$\Rightarrow d(Af_1, Af_2) \le \frac{1}{2} \max_{0 \le t \le 1} |f_1(t) - f_2(t)| = \frac{1}{2} d(f_1, f_2)$$

فإذن A تطبيق مقلص. إذا وضعنا: $f_0(x) = 0$ ولنشكل المتتالية

$$f_1(x) = Af_0(x) = \frac{5}{6} x \; ; \; \dots \; ; \; f_n(x) = \left(\frac{5}{6^n} + \frac{5}{6^{n-1}} + \dots + \frac{5}{6}\right) x \; , \dots$$

وبالتالي فإن:

8

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 5x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 5x \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = x$$

وبالتالي فإن النقطة الثابتة هي x لذلك: $f(x) = x$ أي إن هذه الدالة تمثل الحل الوحيد في الفضاء $C[0,1]$ لمعادلة التكاملية:

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xt\, f(x)\, dt + \frac{5}{6} x$$

مدرس المادة:

د. منير مخلوف [signature]